Corrigé partiel S1 2014 Programmation linéaire

**/ !\ATTENTION/ !\ : les chiffres au fil de l’exo sont érronnés, ne vous fiez pas à eux. Par contre la méthode de résolution est la bonne ! Le cas d’arrêt du simplexe est lorsque tout les termes de delta j sont <= 0**

Considérons le programme linéaire (P) suivant :

Z = 2 x1 + x2 que l’on cherche à maximiser

Contraintes : 4 x1 – x2 ≤ 8 (x3)

-x1 + x2 ≤ 1 (x4)

3 x1 + 2 x2 ≥ 6 (x5)

Et x1 et x2 ≥ 0

1. Pour résoudre ce programme linéaire on utilise la méthode du simplexe.

Test du démarrage à l’origine (x1 = x2 = 0) PROBLEME : la 3e contrainte est violée : 3\*0+2\*0 < 6

Le problème est dû à un petit nombre de contraintes : on peut tenter la méthode particulière :

- Le programme linéaire réduit est obtenu en supprimant provisoirement la contrainte gênante et on le résout de façon standard.

On va donc supprimer provisoirement la 3e contrainte (x5).

On débute maintenant la résolution par simplexe :

1. Passage des inégalités en égalités :

8 = 4 x1 – x2 +x3

1 = -x1 +x2 + x4 Ce qui nous donne le tableau initial suivant :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ci | i |  | x1 | x2 | x3 | x4 |  | Z | Rapport |
| 0 | 3 |  | 4 | -1 | 1 | 0 |  | 8 | 8/4=2 |
| 0 | 4 |  | -1 | 1 | 0 | 1 |  | 1 | 1/-1=-1 |
|  |  | Δj | 2 | 1 | 0 | 0 |  | 0 |  |

Variable d’entrée : le plus grand Δj> 0 (ici 2) -> x1 ( en rouge)=> PIVOT

Variable de sortie : le plus petit rapport > 0 par rapport à la variable d’entrée. (en vert)

Terme encadré : terme à l’intersection du xi et de la variable d’entrée

Il faut maintenant modifier le tableau avec la nouvelle variable d’entrée :

* Nouvelle ligne du pivot :on divise toute la ligne ( verte) par le terme encadré ( ici 4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ci | i |  | x1 | x2 | x3 | x4 |  |  |
| 2 | 1 |  | 1 | -0,25 | 0,25 | 0 |  | 2 |

* Nouvelle ligne de x4 : ANCIENNE LIGNE de x4 – [ (ligne du pivot) \* (terme encadré) ]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| -1 | 1 | 0 | 1 |

|  |
| --- |
| 1 |

-

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1\*-1=-1 | -0,25\*-1= 0,25 | 0,25\* -1= -0,25 | 0\*-1 = 0 |

|  |
| --- |
| 2\*-1=-2 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0 | 0,75 | 0,25 | 1 |

|  |
| --- |
| 3 |

* Nouvelle ligne Δj : ANCIENNE LIGNE Δj – [(ligne du pivot) \* (terme encadré)]

ADDITION pour le Z.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 1 | 0 | 0 |  | 0 |

- +

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1\*2=2 | -0,25 \*2= -0,5 | 0,25\*2=0,5 | 0\*2=0 |  | 2\*2=4 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1,5 | -0,5 | 0 |  | 4 |

Nouveau tableau :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ci | i |  | x1 | x2 | x3 | x4 |  | Z | Rapport |
| 2 | 1 |  | 1 | -0,25 | 0,25 | 0 |  | 2 | 2/1,5= 1,33 |
| 0 | 4 |  | 0 | 0,75 | 0,25 | 1 |  | 3 | 3/1,5 = 2 |
|  |  | Δj | 0 | 1,5 | -0,5 | 0 |  | 4 |  |

Variable d’entrée : le plus grand Δj> 0 (ici 1,5) -> x2 ( en rouge)=> PIVOT

Variable de sortie : le plus petit rapport > 0 par rapport à la variable d’entrée. (en vert)

* Nouvelle ligne du pivot :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ci | i |  | x1 | x2 | x3 | x4 |  | Z |
| 1,5 | 2 |  | -4 | 1 | -1 | 0 |  | -8 |

* Nouvelle ligne de x4 :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 0,75 | 0,25 | 1 |  | 3 |

-

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -4\* 0,75=-6 | 1\*0,75=0,75 | -1\* 0,75= -0,75 | 0 |  | -8\* 0,75=-6 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 0 | 1 | 1 |  | 9 |

* Nouvelle ligne de Δj :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1,5 | -0,5 | 0 |  | 4 |

- +

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -4\* 1,5=-6 | 1\*1,5=1,5 | -1\* 1,5= -1,5 | 0 |  | -8\* 1,5=-12 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 6 | 0 | 1 | 0 |  | -8 |

Nouveau tableau :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Ci | i |  | x1 | x2 | x3 | x4 |  | Z | Rapport |
| 1,5 | 2 |  | -4 | 1 | -1 | 0 |  | 2 | 2/6=0,33 |
| 0 | 4 |  | 6 | 0 | 1 | 1 |  | 9 | 9/6=1,5 |
|  |  | Δj | 6 | 0 | 1 | 0 |  | -8 |  |

Variable d’entrée : le plus grand Δj> 0 (ici 6) -> x1 ( en rouge)=> PIVOT

Variable de sortie : le plus petit rapport > 0 par rapport à la variable d’entrée. (en vert)